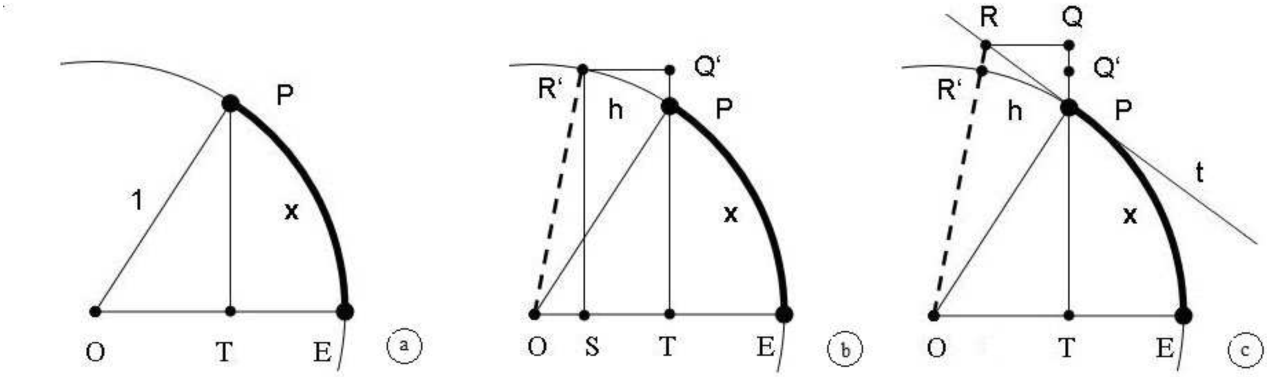


Abb. 60 Betrachtungen am Einheitskreis

Stunden am kürzesten zu sehen (wenn gutes Wetter ist). Stellen Sie die Funktionsgleichung einer trigonometrischen Funktion auf, die die Tageslänge im Verlauf eines Jahres angibt.

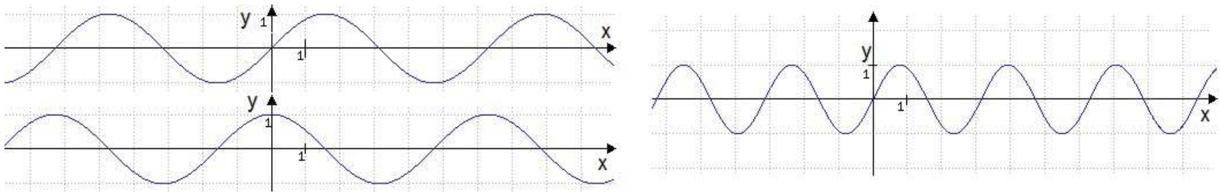


Abb. 59 Skizzieren der Ableitung trigonometrischer Funktionen

5.4.8 Die Ableitung trig. Fktn. (LP) (GFS) EM6: 148-149; LS11: S.142-150+153

294. (U) (GG) ⓐ$_e$) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion der trigonometrischen Fktn (Abb. 59) mit der Technik von Ag 142/345. Welche Ableitungsfkt vermuten Sie **(Formel 63)** ?
$(\sin(x))' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$ ________. Diese Vermutung wollen wir begründen:
b$_e$) Betrachten wir zunächst den Ausschnitt des Einheitskreises in Abbildung 60a, das heißt $\overline{OP} = \overline{OE} =$ _____. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Winkel $\sphericalangle\, EOP$ (im Bogenmaß) und der Bogenlänge x? $\sphericalangle\, EOP =$ _____.
Bestimmen Sie die Längen abhängig von x: $\overline{OT} =$ __________, $\overline{PT} =$ __________.
c$_e$) Nun vergrößern wir den Bogen x um h (Abbildung 60b). Dabei soll h klein sein. Bestimmen Sie folgende Größen in Abhängigkeit von x und h (Winkel immer im Bogenmaß).
$\sphericalangle\, EOR' =$ ______, $\overline{R'S} = \overline{Q'T} =$ __________, $\overline{PQ'} =$ ____________________, $\overline{PR'} \approx$ ___.
d$_e$) Sei t die Tangente in P an den Einheitskreis (siehe Abbildung 60c). In welcher Beziehung steht die Strecke OP zur Tangente t? Zeigen Sie, ΔOTP ist ähnlich zum ΔPQR. Damit sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich. Markieren Sie die einander entsprechenden Dreiecksseiten mit Farbe. Ergänzen Sie die fehlenden Punkte in der Verhältnisgleichung: $\dfrac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{P\quad}}{\overline{P\quad}}$
e$_e$) Begründen Sie, dass für ein kleines $h > 0$ $R' \approx R$ und $Q' \approx Q$ ist. Mit dieser Eigenschaft gilt $\overline{PQ} \approx \overline{PQ'} =$ ________________________, $\overline{PR} \approx \overline{PR'} \approx$ _____. Formulieren Sie die Verhältnisgleichung mit diesen Näherungswerten. Welche Beziehung folgt daraus für $h \to 0$?

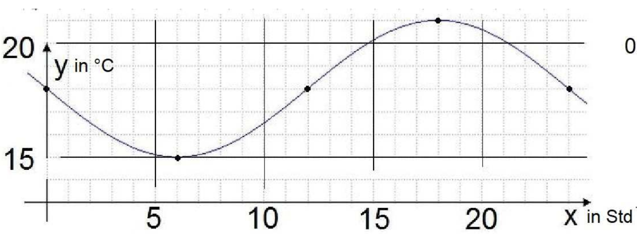
295. Leiten Sie ab: a) $f(x) = 2\sin(x) + 5\cos(x) + 2x^2$, b) $f(x) = 3\cos(x) - 1 - 2\sin(x)$.

5.4.9 Trigonometrische Funktionen im (schriftlichen) Abitur (KA$_G$)

296. ($\approx$ PT ohne WTR aus MK) a$_3$) (2002 im Bogenmaß) Sortieren Sie $\sin(0), \sin(1), \sin(2), \sin(3)$.
b$_3$) (2007 im Gradmaß) Berechnen Sie $\cos(1°) + \cos(2°) + .. + \cos(358°) + \cos(359°)$.
c$_1$) (2008) Welchen Wert kann $f(x) = 5\sin(2x+6) - 3$ maximal annehmen?

297. ($\approx$ Abi 2004) Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert. Messungen beim Training haben gezeigt, dass sich die Bewegung näherungsweise durch die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion v mit $v(t) = 0.4\sin(12t) + 1.5$ beschreiben lässt
(Zeit t in s, Geschwindigkeit v in m/s). a_1) Bestimmen Sie die Periodendauer von v.
b_1) Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers (BAg 111/286).
c_1) (Nach UE 10_6) Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab?
d_2) Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück?
$e_{2,L}$) I*) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{1}{2}\int_x^{x+2} v(t)dt = 1.5$ führt.

298. ($\approx$ Abi 2008) Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion f mit $f(x) = 8\sin(\frac{\pi}{12}(x - 8.5)) + 21$ $(0 \leq x \leq 24)$ beschrieben werden (x in Stunden nach Mitternacht, $f(x)$ in $°C$).
a_1) (Erst nach UE 10_6) Zu welcher Uhrzeit ist die Temperatur minimal bzw. maximal?
b_1) Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Temperatur höchstens $17°C$?
c_1) (Nach UE 10_6) Wie groß ist der maximale Temperaturanstieg?
d_2) Bestimmen Sie einen Term der Fkt. g, der den Innenentemperaturverlauf (Abb. 61a) wiedergibt.
e_2) Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht.
f_1) Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Haus zwischen 0 und 24 Uhr.



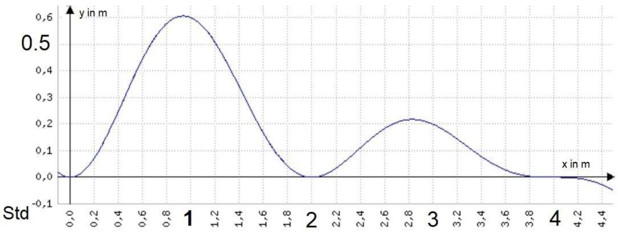


Abb. 61 a) Innentemperaturverlauf b) Minigolfbahn K_g aus Ag. 115/299 → S.912

299. ($\approx$ Abi 2010) Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = 1 - \cos(\pi \cdot x)$ und $g(x) = 0.1 \cdot (4 - x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ihre Schaubilder seien K_f und K_g (siehe Abb. 115/61b).

a_2) Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f an. **b_2)** Beschreiben Sie, wie man K_f aus dem Schaubild der Kosinusfunktion erhalten kann. **c_2)** Stellen Sie f als Sinusfunktion dar.

K_g beschreibt im Bereich $0 \leq x \leq 4$ die Seitenansicht einer Minigolfbahn, die eine Doppelwelle als Hindernis enthält (Längenangaben in Meter). Gespielt wird von links nach rechts. Die Bahn befindet sich bei einer Sporthalle, in der am 22.03.2019 das Fussballspiel L-S 4:1 ausgegangen ist.

nach UE 10_6 : **d_1)** *Bestimmen* Sie den höchsten Punkt der Bahn. **e_2)** *Bestimmen* Sie, an welcher Stelle der Bahn die größte Steigung überwunden werden muss. Wie groß ist diese?
$f_{3,L}$) I*) Die Minigolfbahn ist 1.25 m breit. Nach einem schweren Regenguss steht das Wasser zwischen beiden Wellen 10 cm hoch. *Bestimmen* Sie, wieviele Liter Wasser sich dort gesammelt haben.
g_2) Das Hindernis der Minigolfbahn soll im gleichen Bereich neu gestaltet werden. Das neue Hindernis soll vier jeweils 40cm hohe Wellen erhalten. Am Anfang und Ende soll das Hindernis waagrecht und auf der gleichen Höhe wie bisher enden. *Bestimmen* Sie einen Term einer Funktion, die den neuen Bahnverlauf beschreibt.

300. $\boxed{(\approx \text{Abi } 2011)}$ Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion f mit $f(t) = 50 \cdot \sin(\frac{\pi}{12} \cdot t) + 60$, $\quad 0 \leq t \leq 24$ beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in $\frac{m^3}{h}$; achten Sie auf die Einheit von _____).
a_1) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als 85 $\frac{m^3}{h}$?
b_1) (Nach UE 10_6) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?
c_1) Sei $F_c(t) = -\frac{600}{\pi} \cdot \cos(\frac{\pi}{12} \cdot t) + 60t + c$; zeigen Sie, dass $F_c'(t) = f(t)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ ist.

$F_c(t)$ ist eine Wassermenge mit der Einheit ____, $f(t)$ ist die m_______________ Zuflussr______.
d_2) Berechnen Sie c so, dass das Staubecken zu Beobachtungsbeginn 5000 m^3 Wasser enthält.

e_1) Wieviel Wasser enthält es nach 24 Stunden?
$f_{2,L}$) (GTR) Nach welcher Zeit sind $6991m^3$ Wasser im Becken?

301. (BD = Abi 2011, ab UE 10_6) Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a\sin(ax)+a$, $x \in \mathbb{R}$; f_a hat das Schaubild K_a und die Periode p_a; Formeln: 35, 36, 58, 59, 63, 68.

$a_{2,L}$) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts H_a von K_a für $0 \le x < p_a$ (BAg 145/356).

$b_{3,L}$) Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle Punkte H_a liegen (BAg 154/399).

$c_{4,L}$) Geben Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Wendepunkts W_a von K_a an, der den kleinsten positiven x-Wert hat (BAg 148/368), Formel 70.

d_3) Nach UE 11_3: Die Tangente in $W_a(\frac{\pi}{a}; a)$ an K_a schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche unabhängig von a ist (BAg 141/339).

302. Nach der UE 10_6 zu bearbeiten: (= Abi 2014) **$a_{2,L}$)** Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f gegeben durch $f(x) = a\cos(x)+a^2$ für $-\pi < x < \pi$. Der Graph von f besitzt einen Extrempunkt. Bestimmen Sie dessen Koordinaten. **$b_{4,L}$)** Durch welche Punkte der $y-$Achse verläuft kein Graph G_a?

303. (**Minimalanforderung** UE 10_4): a_f) Eine trigonometrische Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ hat in T einen ihrer tiefsten Punkte und in H einen direkt folgenden höchsten Punkt. Berechnen Sie a, b, c, d. **i)**$_f$ $T(-\frac{\pi}{2}/-2)$, $H(\frac{\pi}{2}/2)$; **ii)** $T(1/-3)$, $H(4/7)$; **iii)** $H(4;6)$, $T(8;2)$ (hier folgt T direkt auf H). (F 62)
b) Lösen Sie die trigonometrische Gleichung im Intervall $[0, 2\pi]$: **i)** $\sin(x) = 0$; **ii)** $\cos(x) = 0$; **iii)**$_f$ $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **iv)**$_f$ $\cos(x) = -\frac{1}{2}$; **v)**$_f$ $\sin(x)\cdot\cos(x) = 0$; **vi)** $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$; (F 36)
c) Bestimmen Sie zu jedem Graphen (einer allgemeinen Sinusfunktion $f(x) = a\sin(b(x-c))+d$) aus Abb. 62 Amplitude und Periode und geben Sie damit den zugehörigen Funktionsterm an.
d) Welche (speziellen) Symmetrien haben die Schaubilder von $\sin(x)$ und $\cos(x)$?
Welche algebraischen Eigenschaften folgen daraus? (F 60) Die Ag 301+302 sind nur LK:

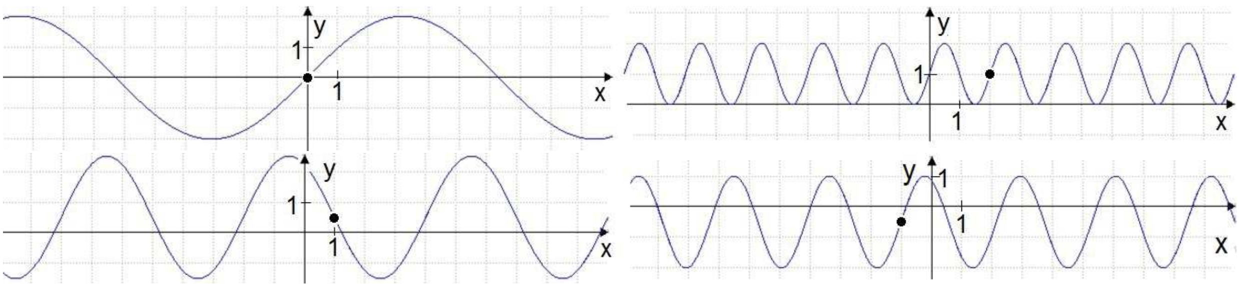


Abb. 62 Trigonometrische Funktionen (F 61)

5.5 Gebrochenrationale Funktionen (UE 11_4) (nur LK)

Vor.: Ag 31/67, Abs. 96/5.2.4, **Basisformeln:** F 12, F 21, F 23, F 43, F 44, F 46, F 56, F 57.

5.5.1 Polstellen → 14.4.2 und 14.4.4 KS$_{17}$: 123-125 + KS$_{09}$: 135-136 ohne Ag2

304. a_e) Zeichnen Sie den Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ für $-2 \le x \le 2$. Was fällt Ihnen auf? Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen in der Nähe von $x = 0$. An einer Polstelle hat $f(x)$ den Funktionswert ___.

x	-2	-1	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	1	2
$f(x)$									

b_r) Eine Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ wobei $p(x)$ und $q(x)$ g______________ Funktionen sind, heißt **gebrochenrationale** Funktion (e: *rational f.*) . Ihr induzierter Defintionsbereich ist $\{x \in \mathbb{R}|$_______$\}$.

c_e) Ordnen Sie jedem der Funktionsterme $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_2(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = \frac{-1}{x\cdot(x-2)}$ und $f_5(x) = \frac{1}{(x+2)\cdot x^2\cdot(x-2)}$ ein Schaubild aus Abb. 63 zu.