1) Achsen werden mit dem Namen, der Einheit und mindestens einer Zahl beschriftet und enden mit einer Pfeilspitze in Richtung $+\infty$.

2) Das Schaubild endet am vorgegebenen Definitionsbereich.

3) Berechnete Punkte (und eventuell auch andere Zwischenpunkte) werden eingezeichnet.

Beispielaufgabe: Bei einem Produktionsvorgang wird die Temperatur eines Werkstückes beschrieben durch die Funktion
$f(t) = 0.01t^3 - 0.6t^2 + 9t + 10$,
$t \in [0; 35]$, t in Minuten, $f(t)$ in Grad Celsius.
a$_1$) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf.
b$_1$) Welche maximale Temperatur nimmt das Werkstück in diesem Zeitraum an?
c$_1$) Wie groß ist der maximale Temperaturabfall?
d$_1$) Damit das Werkstück bearbeitbar bleibt, darf seine Temperatur nicht unter $10°C$ fallen. Kann dies garantiert werden?

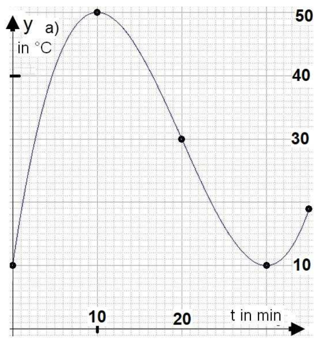

Abb. 98 Temperatur

Lösungsvorschlag:

mathematischer Ansatz	GTR Ergebnis	Antwortsatz
b) $f'(t) = 0$	$\Rightarrow H(10; 50)$.	Die Maximaltemperatur ist $50°C$.
c) $f''(t) = 0$	$\Rightarrow W(20; 30)$;	$f'(20) = -3$. Der Maximaltemperaturabfall ist 3 $\frac{°C}{min}$.
d) $f'(t) = 0$	$\Rightarrow T(30; 10)$.	Die Temperatur wird nicht unterschritten.

Bemerkung: Beachten Sie hierbei, dass der mathematische Ansatz nicht unbedingt etwas mit der GTR - Rechnung zu tun haben muss. Die hinreichende Bedingung wird genau dann erwartet, wenn kein Schaubild (oder GTR) dazu gegeben wird. Ein Verweis zB 'Der Graph zeigt einen Hochpunkt' ist wünschenswert. Die Betrachtung der Randwerte ist nur dann relevant, wenn diese definitiv extremal (also alleine ein globales Extremum) sind.

Die Anwortsätze können deshalb ergänzt werden:

b) Das Maximum wird im Hochpunkt angenommen, deshalb ist die Maximaltemperatur $50°C$;

c) Der maximale Temperaturabfall wird im Wendepunkt angenommen, deshalb ist dieser $|f'(20)| = |-3|$ also 3 $\frac{°C}{min}$;

d) Das Minimum wird im Tiefpunkt angenommen, deshalb ist die Minimaltemperatur $10°C$; $10°C$ wird also nicht unterschritten.

6.3.9 e- Funktionen im Abitur (KA$_G$) ($\overline{DHBW}$)

Ihr Notendurchschnitt aus den Halbjahren $11_1, 11_2$ und 12_1 bildet die sogenannte Anmeldenote, die eine Prognose für Ihr Abschneiden im Abitur ist. Deshalb wird jede Arbeit, die ich mit Ihnen schreibe, etwa Abiturniveau sowie einen Pflicht und einen Wahlteil haben. Zur Vorbereitung auf eine Klausur in den Klassen 11 und 12 sollten Sie **dringend** alte Abituraufgaben rechnen. Diese finden Sie z.B. auf www.mathe-aufgaben.com. In Klasse 11 können Sie von einer nicht gelösten Aufgabe oft nicht erkennen, ob dies am 'nicht verstanden' oder am 'nicht behandelten' Stoff lag. Deshalb gibt es oft am Ende einer Unterrichteinheit eine Sammlung von Aufgaben, die Sie bis hier her beherrschen sollten; gleiches finden Sie in der Abiturvorbereitung im Abs 864/16.3. Diese Ag werden im Unterricht nur auf Anfrage besprochen und sind als Klausurvorbereitung **unerlässlich**. Wenn Sie nicht ableiten können, dann schaffen Sie etwa 0 VP! I*) bedeutet, dass bei dieser Ag Integralrechnung aus Abs 7.1 notwendig ist. Bei den Operatoren 'bestimmen' und 'angeben' darf ein Wert aus der einer gegebenen Abb. abgelesen werden; bei 'berechnen' nicht.

430. ($\approx$ Abi 2013) Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion f mit $f(t) = 10000 \cdot (e^{-0.5t} - e^{-t})$ ($t \geq 0$ in Std. seit Regenbeginn, $f(t)$ in Liter pro Std.) beschrieben.

Bem.: Der Begriff Zufluss kann (leider) die Einheit Liter (dann ist der Zufluss ein V______) oder die Einheit $\frac{\text{Liter}}{h}$ (dann ist der Zufluss die A________ eines Volumens) haben. Deshalb sollten Sie immer die Einheiten genau betrachen. Einheit $\frac{VE}{ZE}$ ist V', Einheit $\frac{VE}{ZE^2}$ ist V''. Bei dieser Aufgabe ist der Zufluss ein Volumen und die momentane Zuflussrate (Einheit $\frac{VE}{ZE}$) ist V'.

a_1) Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate.
b_1) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?
c_1) In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde?
$\text{d}_{2,L}$) Zeigen Sie, dass der Inhalt des Tankes durch $F(t) = 10000 \cdot (1 - 2e^{-0.5t} + e^{-t})$ beschrieben wird.
$\text{e}_{1,L}$) I*) Bestimmen Sie den mittlere Zuflussrate in den ersten 10 Stunden.
$\text{f}_{1,L}$) I*) Wieviel l des Regens werden langfristig in den Tank geflossen sein?
$\text{g}_{1,L}$) Skizzieren Sie den Tankinhalt innerhalb der ersten 10 Stunden nach Regenbeginn in einem geeigneten Ausschnitt eines Koordinatensystems.

431. ($\approx$ Abi 2016) In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 140 cm. Abb. 162/99 a) zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(t) = 16 \cdot e^{-0.5t} - 14e^{-t} - 2$, die für $0 \leq t \leq 12$ die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe (mÄS) zum Zeitpunkt t beschreibt (t in Stunden nach 10.00 Uhr, $f(t)$ in Zentimeter pro Stunde).
a_2) Berechnen Sie die maximale mÄS der Schneehöhe.
b_1) Geben Sie etwa den Zeitraum an, in dem die mÄS größer als 2 cm pro Stunde ist.
c_2) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an welchem die **Schneehöhe** maximal ist.
d_2) Berechnen Sie die Stellen, an welchen die mÄS am stärksten zu bzw. abnimmt. Bestimmen Sie, wie groß ist die maximale Abnahme der Änderungsrate etwa ist.
e_2) I*) Bestimmen Sie die Schneehöhe um 12.00 Uhr.
$\text{f}_{4,L}$) Um 12.00 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die mÄS an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht. Geben Sie an, um wie viele Stunden sich durch diese Maßnahme der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt, verlängert. I*) Wie hoch ist jetzt die maximale Schneehöhe?
$\text{g}_{3,L}$) I*) Geben Sie einen integralfreien Funktionsterm $F(t)$ an, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t $(0 \leq t \leq 2)$ beschreibt.
$\text{h}_{2,L}$) Formulieren Sie zu der Gleichung $F(t+2) - F(t) = 4$ eine Frage im Sachzusammenhang.

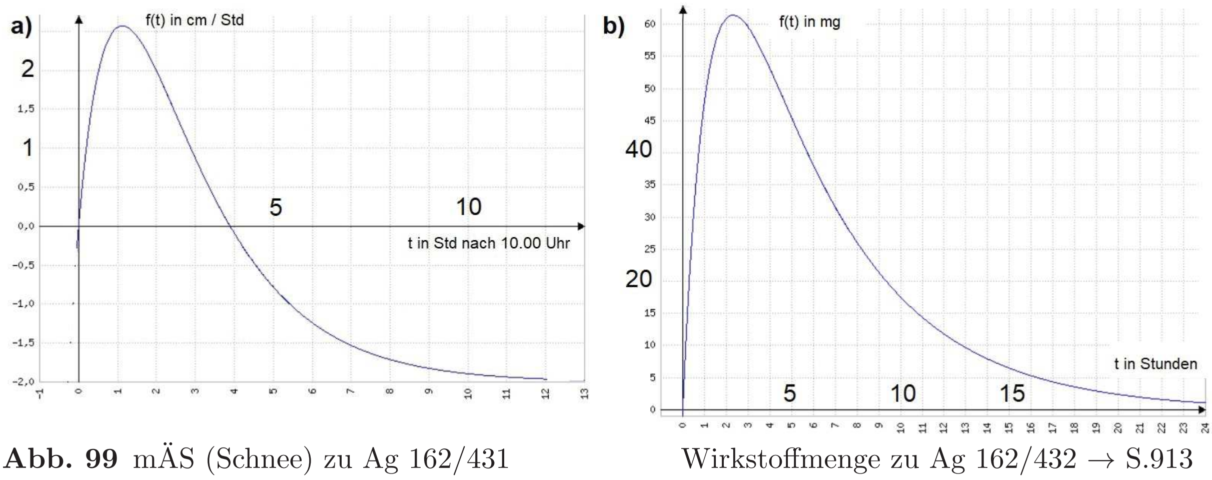

Abb. 99 mÄS (Schnee) zu Ag 162/431 Wirkstoffmenge zu Ag 162/432 → S.913

432. ($\approx$ Abi 2012) Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden. Abb. 162/99 b) zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(t) = 130(e^{-0.2t} - e^{-0.8t})$, die für $0 \leq t \leq 24$ die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten (Wm) beschreibt, wenn das Medikament mithilfe einer Spritze verabreicht wird (t in std. nach der Injektion, $f(t)$ in mg).
a_1) Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 35 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind. Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.
Berechnen Sie: b_1) Wann die Wirkstoffmenge maximal ist. Wie hoch ist sie dann?
und c_1) Zu welchen Zeitpunkten die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. abnimmt.

$d_{2,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 5 Stunden.
e_2) Formulieren Sie zu der Gleichung $f'(t) = 2$ eine Frage im Sachzusammenhang.
f_1) Geben Sie die Asymptoten von f an und erläutern Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.

Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wm beschreiben durch die Fktn g mit $g(t) = 80(1 - e^{-0.05t})$ (t in min seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg).
g_1) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?
h_2) Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.
i_2) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Wm $1\frac{mg}{Min}$ beträgt.
j_2) I*) Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten vier Stunden.
k_3) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $g(t+15) = g(t) + 30$ führt.

433. ($\approx$ Abi 2009) Abb. 163/100 a) zeigt den Graphen der Funktion $f(t) = 36.5 + t \cdot e^{-0.1t}$, die für $t \geq 0$, modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve eines Erkrankten beschreibt. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $°C$.
a_1) Wie hoch ist die maximale Temperatur? Zeigen Sie das der Temperaturverlauf danach smf ist.
b_1) Wie hoch ist der maximale Temperaturabfall?
c_1) Wann sinkt die Körpertemperatur unter $37°C$?
d_1) Wie entwickelt sich die Temperatur langfristig?
e_2) Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f'(t) = -0.1$ führt.
f_1) I*) Zeigen Sie, dass $F(t) = 36.5t - 10t \cdot e^{-0.1t} - 100 \cdot e^{-0.1t}$ eine Stammfunktion von f ist.
Nur LK: Bestimmen Sie die mittlere Körpertemperatur in den ersten 48 Stunden.

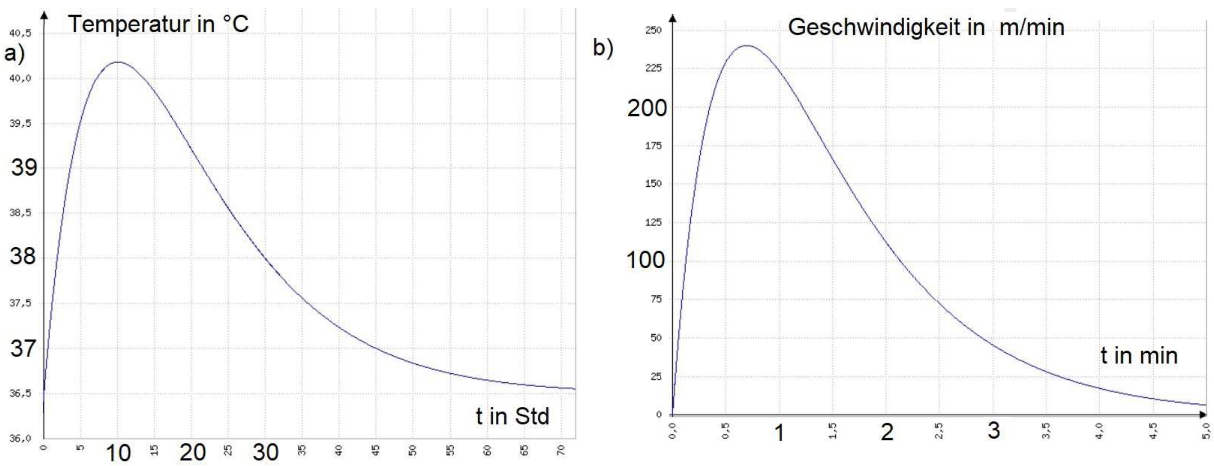

Abb. 100 Fieberkurve zu Ag 163/433 Motorboot zu Ag 163/434 → S.913

434. ($\approx$ Abi 2010) Ein Motorboot fährt geradlinig mit der Geschwindigkeit $v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}$, (Abb. 100 b) $t \geq 0$, t in min, $v(t)$ in $\frac{m}{min}$.
a_2) Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes.
b_2) Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes am stärksten ab?
c_2) Wie lange fährt das Motorboot schneller als $180\frac{m}{min}$?
$d_{1,L}$) I*) Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten?
$e_{2,L}$) I*) Wie weit fährt das Motorboot in diesem Modell?

435. (= Abi 2008) Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 1000 - 800e^{-0.01t}$, $t \geq 0$ (t in Minuten, $f(t)$ in Liter). **a_2)** Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt?
b_2) Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
c_2) Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

$d_{2,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.

436. ($\approx$ Abi 2013; $\to$ Ag 349) Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^4}{24} - x^2 + 5.625, \quad x \in [-4;4]$; 1 LE entspricht $1m$.

a_1) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten? Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?

b_3) (GTR) Im Stollen soll in $3.92m$ Höhe eine Lampe aufgehängt werden. Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1.3 m von den Wänden entfernt sein. Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.

437. (Schätzung von Sd) Die Konzentration des Wirkstoffes einer Tablette im Blut wird beschrieben durch die Funktion g mit $g(t) = 9 \cdot (e^{-t} - e^{-2t})$, $t \geq 0$ (t in Stunden nach der Einnahme einer Tablette, $g(t)$ in $\frac{mg}{l}$). Ein Patient nimmt eine Tablette ein (bei jedem Teil ist eine Rg verlangt).
a_2) Nach Herstellerangaben wirkt die Tablette ab einer Konzentration von $2\frac{mg}{l}$. Zwischen welchen Zeitpunkten wirkt das Medikament? **b_2)** Wie hoch ist die maximale Konzentration?
c_2) Wie hoch ist die maximale Abnahme der Konzentration?
d_1) Wie entwickelt sich die Konzentration langfristig?

$e_{2,L}$) I*) Bestimmen Sie die mittlere Wirkstoffkonzentration während der ersten Stunde.

438. **Minimalanforderungen UE** 11_2: Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung (madness) von $f(x)$ durch: a) $f(x) = 6 - e^{0.4x}$; b) $f(x) = (x+1) \cdot e^{2x-4}$; c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-0.5x}$;

d) Lösen Sie ohne TR: i) $e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$, ii) $e^x = 1 + 2e^{-x}$, iii) $x \cdot e^{2x-4} - x = 0$;

e_L) Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Schar $f_t(x) = e^x \cdot (t - x)$ geben. Ber. Sie die Ortskurve ihrer Hochpunkte.

f) Ein Polynom dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und in $W(2; -3.2)$ einen Wendepunkt. Berechnen Sie dessen Funktionsgleichung.

6.3.10 Die Regel von de l'Hospital (UE $M+_2$) (GFS)

439. a_e) Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \neq$ ____. Warum kann dieser Limes nicht konventionell berechnet werden?

b_1) Berechnen Sie heuristisch die Grenzwerte für folgende Terme für x gegen 0:

i) $\frac{\sin(x)}{x}$, ii) $\frac{\sin(2x)}{x}$, iii) $\frac{\sin(3x)}{x}$, iv) $\frac{\sin(nx)}{x}$ $n \in \mathbb{N}$?

c_e) Durch welche Operation könnte das '$n\cdot$' zustande kommen?
d_2) Ein Ausdruck der Form '$\frac{0}{0}$' wird auch bei der Ber. des D____________________ betrachtet.
e_2) Sei f differenzierbar und $f(0) = 0$; berechnen Sie $f'(0)$ mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil d).
f_e) Sei $f(0) = g(0) = 0$. Der Term $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ kann (vorerst) nicht (allgemein) berechnet werden.

Betrachten Sie $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ (!), mit Hilfe des Differenzenquotienten. Vereinfachen Sie; welche erstaunliche Formel entsteht?

g_e) Die Regel von de l'Hospital: Sei $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, f, g differenzierbar. Wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$_______ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (oder $|g(x)| \to$ ____), dann gilt $\lim\limits_{x\to x_0}$ ____________ $= \lim\limits_{x\to x_0}$ ____________ (auswendig).

440. (KA_L) Ber. Sie die folgenden Limites: a_1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$; **$b_1$)** $\lim\limits_{x\to 0.5} \dfrac{6x^2-5x+1}{8x^2-2x-1}$; **$c_1$)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - e^{-x}}$;

d_2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a^x)}{e^x - 1}$; e_1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-2}{3x+8}$; f_2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{e^{-x} - \ln(x+e)}$; **$g_2$)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(1-e^{x-3})}{x - 3e^{x-3}}$;

h_2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$; Die Regel von de l'Hospital darf auch ________________ angewendet werden.

i_2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(2x)}{e^x + e^{-x} - 2}$; **$j_3$)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\ln(x-1)} - \dfrac{1}{x-2}$; **$k_3$)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$; l_2) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$; m_2) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;