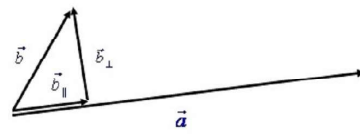


693. In der Physik wird bei einer schiefen Ebene die Gewichtskraft $\vec{G}$ (mit $|\vec{G}| = m \cdot g$) in Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$ und Normalkraft $\vec{F}_N$ aufgeteilt (orthogonal zerlegt). **a₃)** Geben Sie den Einheitsvektor $\vec{a}$ der schiefen Ebene abhängig von α und den Vektor $\vec{G}$ (Gewichtskraft) an.
b₃) Berechnen Sie $\vec{F}_H$ und $\vec{F}_N$ (sowie deren Beträge).
694. (⊙) **Winkelhalbierende:** **a₂)** Konstruieren Sie eine Winkelhalbierende. Beweisen Sie die Technik.
b₂) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich lang, berechnen Sie einen winkelhalbierenden Vektor $\vec{w}$.
c₂) Seien $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ (beliebig lang), berechnen Sie einen winkelhalbierenden Vektor $\vec{w}$.
d₂) Seien $g_1 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t \cdot \vec{r}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t \cdot \vec{r}_2$ Geraden. Welchen Punkt haben die Geraden gemeinsam? Berechnen Sie die winkelhalbierenden Geraden g, h von g_1 und g_2 .
e₃) Zeigen Sie, dass g und h (aus Teil d) o _____ sind.
f₂) Ber. Sie alle Winkelhalbierenden Geraden von g_{AB} und g_{AC} mit $A(1|2|3)$, $B(4|6|3)$ und $C(8|2|27)$.

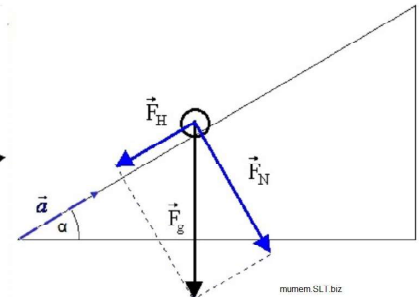


Cartoon 52

Abb. 162



a) Orthogonale Zerlegung



b) Hangabtrieb

695. (⊙) ($\approx$ Abi 2010) Gegeben sind der Punkt $A(4.5|6|3.5)$ sowie die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a₂) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der x_1, x_2 -Ebene hier ist $x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$.
b₂) i₂) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h die durch Spiegelung von g an A entsteht.
ii₃) Zeigen Sie, dass bei einer Punktpiegelung das Bild einer Geraden g immer _____ zum Urbild ist. **c₁)** Sei $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$. Zeigen Sie, dass $\triangle ABC$ gleichschenkelig ist, ergänzen Sie $\triangle ABC$ durch D zu einer Raute und berechnen Sie deren Innenwinkel.
d₂) ($\approx$ Abi 2005) Gegeben sind die Punkte $A(2|1|3)$, $B(2|5|3)$, $C(5|3|5)$ und $D(6|3|5)$. Der Punkt T liegt auf der Geraden g_{CD} und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten von T . Welchen Flächeninhalt hat $\triangle ABT$?
e_{1,3}) ($\approx$ Abi 2016) Gegeben sind die Punkte $B(6|0|0)$, $M_1(0|-3|2.5)$, $M_2(0|3|2.5)$ und $S(0|0|5)$.
i) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks $\triangle BM_1M_2$. **ii)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q , der auf der Kante BS liegt und mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck bildet.

10.2.4 Beweise mit Vektoren (nur LK, $\overline{DHBW}$) (GFS)

LS: S.325-326

Algorithmus: Bei einem Beweis mit Hilfe von Vektoren sollten Sie folgendermaßen vorgehen:

- 1) Fertigen Sie eine Skizze an (das ist sowieso immer gut - benennen Sie vor allem die Punkte).
- 2) Formulieren Sie Voraussetzung und Behauptung des Satzes als 'Wenn - dann' Aussage (Verwenden Sie dabei die Verbindungsvektoren der Punkte aus Schritt 1).
- 3) Benennen Sie (möglichst wenige) Vektoren.
- 4) Stellen Sie die Voraussetzung (oder Behauptung) als Linearkombination der Vektoren aus 3) dar.
- 5) Rechnen Sie (hoffentlich die Behauptung mit Hilfe der Voraussetzung) aus.

696. (⊙) Beweisen Sie die folgenden Sätze mit Hilfe von Vektoren:
a₂) Wenn sich die Diagonalen im Viereck halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.
b₂) Sei A, B, C, D ein Parallelogramm und M_1, M_2, M_3, M_4 dessen Seitenmitten, dann ist M_1, M_2, M_3, M_4 ein Parallelogramm.
c₃) Was entsteht bei b), wenn A, B, C, D ein beliebiges Viereck ist? **d₃)** In welchem Verhältnis teil der Schwerpunkt eines Dreieck dessen Schwerlinie?

697. Beweisen Sie die folgenden Sätze mit Hilfe von Vektoren und dem Skalarprodukt:

- Ⓐ₃) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende orthogonal zur Basis.
 Ⓑ₃) Liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig.
 Ⓒ₃) Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist, dann ist $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$.
 Ⓓ₂) Welche berühmten Sätze verbergen sich hinter b) und c).
 e₅) Im Drachen sind die Diagonalen orthogonal.

Weiter Abs 261/10.4.6

698. (U) **Minimalanforderungen UE 11₆ Skalarprodukt_f:** Gegeben seien die Punkte $A_1 = A_2 = A_3(1|2|3)$, $B_1(3|4|4)$, $C_1(-1|3|5)$, $B_2(0|2|4)$, $C_2(2|3|3)$, $B_3(3|4|4)$, $C_3(7|8|6)$,

a₁) Berechnen Sie die Innenwinkel der Dreiecke $\Delta_i : A_i, B_i, C_i$, $i = 1, 2, 3$.

b₂) Seien $\vec{a} = \overrightarrow{B_2A_2}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{B_2C_2}$; Berechnen Sie $\vec{b}_{||}$ und $\vec{b}_{\perp}$.

c₂) Berechnen Sie die Winkelhalbierende von $\overrightarrow{A_2B_2}$ und $\overrightarrow{A_2C_2}$. **Wettbewerbsag: 70/180**

10.3 Ebenenberechnung (UE 12₁)

Basis: F 64, Ag 248/671b, Ag 249/674, F 83.

10.3.1 Die Parameterform (e: *parametric form*) der Ebene → 10.10.3 LS: S.246-249

699. (U) Ⓐ_w) Sei $A \neq B$; geben Sie die Verbindungsgerade analog zu Ag 246/663 (**Order 66**) an. Erklären Sie die von dieser Parameterdarstellung erzeugte S.

Ⓑ₁) Finden Sie Punkte der Ebene aus Abbildung 163. Was haben alle diese Punkte gemeinsam?

Ⓒ_e) Beschreiben Sie die Punkte der Ebene komponentenweise.

Ⓓ_e) Eine Gerade im Raum wird mit der Form $\vec{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ beschrieben. Finden Sie eine analoge Beschreibung für eine Ebene.

Ⓔ_r) Eine Ebene (e: *plane*) ist dimensional und hat deshalb nicht k vektoren.

f₁) Seien A, B, C drei (nicht kollineare) Punkte. Wie können Sie die Ebene durch diese drei Punkte darstellen. Vergleichen Sie mit der Darstellung einer Geraden durch A und B .

Ⓔ₁) Berechnen Sie die Ebene durch (i) $A(1|2|3)$, $B(2|2|6)$ und $C(1|1|3)$ (bzw. (ii) $A(0|1|2)$, $B(3|1|1)$ und $C(-1|2|3)$). Liegt der Ursprung in der Ebene?

h₁) Berechnen Sie die Ebene durch $A(1|1|1)$, $B(1|2|3)$ und $C(1|3|5)$. Was fällt Ihnen auf?

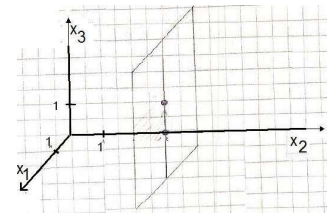


Abb. 163 Ebene

700. **Schneiden von Ebenen in Parameterform:** _e L

a) Sei $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Schneiden Sie E_1 und E_2 . Das $_ \times _$ LGS ist u . Damit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ nicht e ($u - g = p = _$), idR dimensional (geometrisch: Eine).

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Ebene E durch $A(1|1|1)$, $B(5|-1|1)$ und $C(3|1|0)$ und der Geraden g durch $P(0|5|2)$ und $Q(1|7|4)$ mit Hilfe eines $_ \times _$ L .

10.3.2 Die Punktnormalenform (nur LK) → 10.10.12

LS: S.254-255

701. (U) a_e) Betrachten Sie den Fußboden. Welche Eigenschaft haben alle Vektoren, die auf der Fußbodenebene senkrecht stehen? b_r) Es gibt viele Vektoren, die zu einer Ebene senkrecht stehen. Diese heißen N vektoren (e: *normal vectors*) und sind alle .

c_e) Gegeben sei eine Ebene E , ein Vektor $\vec{n}$, der zu E orthogonal ist, sowie zwei Punkte der Ebene P und X . Beschreiben Sie die Lage des Vektors $\overrightarrow{PX}$ bezogen auf E bzw. $\vec{n}$. Welche (algebraische) Bedingung gilt für $\overrightarrow{PX}$ und $\vec{n}$? d_r) Eine Ebene, die den Punkt P enthält und

verallgemeinert $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{d}$. Ein LGS ist also als Vektorgleichung interpretierbar.

Ⓐ_e) 'Kreuzmultiplizieren' Sie die Vektorgleichung mit $\vec{b}$. $\vec{b} \times \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$, weil $\vec{b}$ 1 _____ ist. Danach skalarmultiplizieren Sie das Ergebnis mit $\vec{c}$. $(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Damit ist das LGS (teilweise) _____.

Ⓓ_w) (Reminder): D _____ durch einen Vektor (allein) ist v _____!

Ⓒ₂) Geben Sie eine Formel für x_2 und für x_3 an.

Die Lösung eines LGS kann direkt mit Hilfe von _____ Spatprodukten angegeben werden.

Ⓓ₂) Die Formel gilt nicht, falls $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \underline{\hspace{2cm}}$.

Ⓔ₂) Welche Aussage können Sie über eindeutige Lösbarkeit von LGS (3G 3U) machen?

Ⓕ₂) Wenden Sie Ihr Ergebnis auf das obige LGS an.

g₂) Stellen Sie das nebenstehende LGS

vektoriell dar und berechnen Sie

die Lösung mit Hilfe der Cramerregel

$$\begin{pmatrix} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +6x_2 & +3x_3 & = & 14 \\ -3x_1 & +4x_2 & & = & 5 \end{pmatrix}$$

h₂) Berechnen Sie (wenn möglich) die LGS der Aufgaben 731 a), 267/757 c), 269/763 g) sowie 272/771 a) und 771 b) mit Hilfe der Cramerregel.

10.4.6 Das Teilverhältnis (nur LK, $\overline{DHBW}$) $\rightarrow$ 10.10.17 (GFS)

LS: S.327-331

732. (U) a₁) Herr Sd teilt sich mit seinem Bruder einen Bauernhof im Verhältnis 7:5. Der Hof hat einen Gesamtwert von 360 000 €. Welchen Wert hat der Besitz von Herrn Sd (Rechnung verlangt)?

b₁) Wir betrachten die drei Punkte $S(1|1)$, $T(3|5)$ und $Z(4|7)$. Welche Eigenschaft haben die drei Punkte? Welchen Teil der Strecke SZ hat man in T zurückgelegt? Definieren Sie Größe 'Teilstrecke' (TS). Wo haben Sie diese Größe schon ein Mal gesehen?

c₂) Zeichnen Sie in Ihre Skizze aus b) noch zwei weitere induzierte Punkttripel mit gleicher Teilstrecke ein. d_e) Es genügt die Teilstrecke von _____ zu berechnen.

e₁) Berechnen Sie die Teilstrecke von $S(5|2|-8)$, $Z(13|-2|12)$ und $T(7|1|-3) = TS(S, Z, T)$.

f₁) In welchem Verhältnis teilt T die Strecke SZ ? Definieren Sie 'Teilverhältnis' und berechnen Sie $TV(S, Z, T)$ mit den Punkten aus b) und c).

g₂) Wie kann $TV = TV(S, Z, T)$ (fast bijektiv) in $TS = TS(S, Z, T)$ umgerechnet werden?

733. Vorr.: Abs 253/10.2.4; Suchen Sie bei den Teilen a bis d einen Vektorzug mit Parametern und argumentieren Sie mit linearer Unabhängigkeit.

a₃) Zeigen Sie (vektoriell), dass im Parallelogramm sich die Diagonalen halbieren.

Ⓓ₃) Sei A, B, C, D ein Parallelogramm und M die Mitte von $\overline{BC}$ und sei $S = \overline{AM} \cap \overline{BD}$. Welchen Teil der Strecke $\overline{AM}$ hat man in S zurückgelegt (Abb. 260/165b)?

c₃) Im gleichschenkligen Trapez A, B, C, D ist $|\overline{AB}| = 2 \cdot |\overline{CD}| = 2 \cdot |\overline{AD}|$. Sei S der Schnittpunkt der Diagonalen. Welchen Teil der Strecke $\overline{AC}$ haben Sie in S zurückgelegt (Abb. 260/165c)?

d₃) Zeigen Sie, dass sich die Schwerlinien im Dreieck im Verhältnis 2:1 teilen.

e₃) Abi 2004: (Abb: 166a) Ein Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. M ist die Mitte der Strecke AB . T teilt die Strecke CM im Verhältnis 3 : 1. Die Strecke BD verläuft durch T . In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch T geteilt?

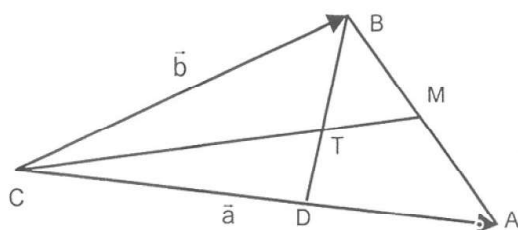
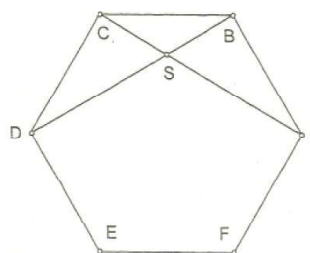


Abb. 166 Abi 2004



Abi 2006

f₂) Abi 2005: Die Pkte P, Q, R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S . Die Pkte M_1 und M_2 sind die Mittelpkte der Strecken PQ und PR , die Pkte M_3 und M_4 sind die Mittelpkte der Strecken QS und RS . Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$ gilt.

g₂) Abi 2006: (Abb: 166b) Gegeben ist das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken AC und BD teilen.

h₂) Abi 2007: (Abb: 167a) Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig und rechtwinklig, P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB . Beweisen Sie, dass die Strecken MP und MQ orthogonal und gleich lang sind.

i₂) Abi 2008: Im Viereck $ABCD$ gilt für die Diagonale AC : $\overrightarrow{AC} = 0.4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Zeichnen Sie den Sachverhalt. In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von BD geteilt?

j₂) Abi 2009: (Abb: 167b): Das Rechteck $OABC$ ist dreimal so lang wie breit. Für den Punkt T gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA}$. Zeigen Sie, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.

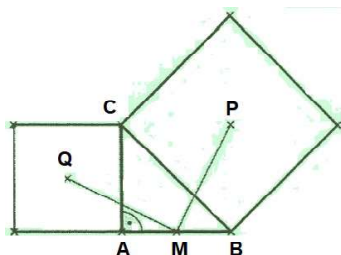
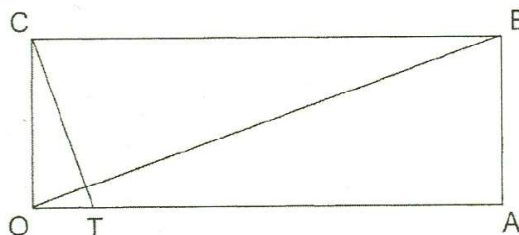
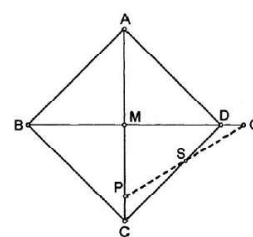


Abb. 167 Abi 2007



Abi 2009



Abi 2010

k₂) Abi 2010: (Abb: 167c) Das Quadrat $ABCD$ hat den Mittelpunkt M . Die Punkte P und Q werden so gewählt, dass $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MQ} = \frac{5}{4} \cdot \overrightarrow{MD}$ gilt. Die Strecken CD und PQ scheiden sich im Punkt S . In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke CD ?

734. **Minimalanforderung** UE 12₂: Berechnen Sie die Ecke D , die Grundfläche und das Volumen einer Pyramide deren Grundfläche ein Parallelogramm $A(5|2|0), B(2|5|0), C(4|2|-2), D$ und deren Spitze $S(1|1|0)$ ist.

10.5 Schnittwinkel und Abstände (UE 12₄)

Basis: F 31, F 32, F 34, F 35, F 66, F 82, F 83, Ag 255/705.

10.5.1 Schnittwinkel ($\overline{RP}$)

LS: S.295-298

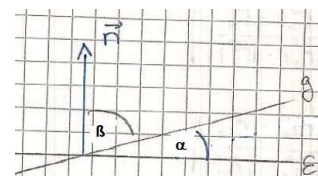
735. a_w) Mit welcher Formel berechnet man den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?
b₂) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2 . Warum schneiden sich die Geraden?

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

c₁) Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf $g_1 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t\vec{r}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{p}_1 + t\vec{r}_2$.

736. a_e) Berechnen Sie den Schnittwinkel von $E_1 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3$ und $E_2 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$.
b_e) Verallgemeinern Sie auf $E_1 : (\vec{x} - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$ und $E_2 : (\vec{x} - \vec{p}_2) \cdot \vec{n}_2 = 0$

737. (U) Wir wollen den Schnittwinkel zwischen einer Geraden $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{r}$ und einer Ebene $E : (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n} = 0$ berechnen.
a_e) Welche Probleme gibt es dabei? Erstellen Sie eine S_____.
b_e) Welchen Winkel können Sie einfach berechnen?
c₁) Welcher Zusammenhang besteht zwischen β und α ?
d_e) Welche Formel können Sie anwenden? Vereinfachen Sie Ihre gefundene Schnittwinkel-Formel.

Abb. 168 $\angle (g, E)$