459. (U) **Die Summenregel:**$_e$ a) Formulieren Sie die Regel für die Ableitung einer Summe $(f(x)+g(x))'$ und formulieren (und beweisen) Sie eine entsprechende Regel für Stammfunktionen.

b$_e$) Lösen Sie Aufgabe 459 für die Regel des konstanten Faktors: $(c \cdot f(x))'$ **(Formel 78)** .

c$_b$) (KA$_B$) Berechnen Sie $\int x^{0.3}dx$, $\int \frac{1}{x^3}dx$, $\int \sqrt{x}dx$, $\int(6x^2-4x)\,dx$, $\int(9x-2)^2dx$.

d$_e$) Interpretieren Sie Abbildung 109a. Wie kann $\int_a^c f(x)\,dx$ auch berechnet werden?

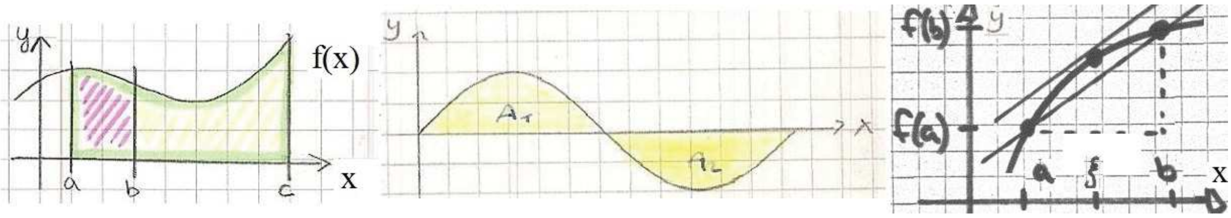

Abb. 109 Zusammensetzen von Flächen, orientierte Flächen Mittelwertsatz

460. (KA$_B$) Geben Sie zu den folgenden Funktionen $f(x)$ alle Stammfunktionen $F(x)$ an: **a**$_1$) $f(x)=3x$, **b**$_1$) $f(x)=4x+2$, **c**$_1$) $f(x)=x^2-3x+1$, **d**$_1$) $f(x)=x^3-2x^2+2x+2$, **e**$_1$) $f(x)=x^{-2}+3x^{-3}$, $\boxed{\mathbf{f}_1}$) $f(x)=\sqrt{x}+2x^4$, **g**$_2$) $f(x)=\frac{2}{x^2}+\sqrt{4x}$, **h**$_2$) $f(x)=\frac{4}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}$, **i**$_2$) $f(x)=3\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}-4x^3$, **j**$_2$) $f(x)=(3x-4)^2$, **k**$_2$) $f(x)=5-2(6x-2)^2$, **L**$_2$) $f(x)=3-4x^3-x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{x}{3\sqrt{x}}$.

461. (KA$_G$) Geben Sie zu den folgenden Fktn. $f(x)$ die Stammfunktion $F(x)$ durch den Punkt P an:
a$_{b,2}$) $f(x)=2x,\ P(2|7)$; **b**$_2$) $f(x)=x^2-4x+2,\ P(3|1)$; $\boxed{\mathbf{c}_2}$) $f(x)=x^3-3x^2+6x,\ P(4|2)$;
d$_2$) $f(x)=\sqrt{x},\ P(9|10)$; **e**$_2$) $f(x)=\sin(x),\ P(0|4)$; **f**$_2$) $f(x)=3\cos(x),\ P(\pi|\sqrt{2})$;
g$_2$) $f(x)=e^x,\ P(1|2e)$; **h**$_2$) $f(x)=2e^x+4,\ P(0|5)$; **i**$_2$) $f(x)=x-1-e^x,\ P(1|2)$;

462. (KA$_B$) Berechnen Sie folgende Integralfktn **a**$_1$) $\int_0^x(2t+1)dt$; **b**$_1$) $\int_3^x(2t+3)dt$; **c**$_1$) $\int_2^x(t^2+t)\,dt$; **d**$_1$) $\int_3^x(t^2+2t-1)dt$; $\boxed{\mathbf{e}_1}$) $\int_{-2}^x(t^3+t)dt$; **f**$_2$) $\int_\pi^x 2\cos(t)dt$; **g**$_2$) $\int_x^2(4t+2)dt$; **h**$_2$) $\int_x^{2x}(2t+4)dt$.

463. (Thx Trs) Sei $a=\int_{-1}^0 f(x)dx$, $b=\int_0^1 f(x)dx$, $c=\int_0^2 f(x)dx$, $d=\int_0^3 f(x)dx$ und $e=\int_0^4 f(x)dx$. Zeigen oder berichtigen Sie folgende Aussagen: **a**$_1$) $\int_{-1}^4 f(x)dx=e-b$, **b**$_1$) $\int_1^3 f(x)dx=d-b$,
c$_2$) $\int_2^4(f(x)+1)dx=e-c+1$, **d**$_3$) $\int_1^2 f(x-1)dx=d-c$, **e**$_1$) $\int_1^3 2f(x)dx=2(d-b)$,
f$_3$) $\int_0^2 f(2x)dx=e/2$, **g**$_3$) $\int_0^1 2f(4x)dx=d/2$, **h**$_4$) $\int_1^2 f(2x-2)dx=c/2$,

7.1.9 Praktische Ag mit Integralfktn (≈ Abitur) (KA$_G$) ($\overline{DHBW}$) KS$_{17}$: 90-93

464. (Nur LK) Ein stehendes Auto wird mit der konstanten Beschleunigung $a=2\frac{m}{s^2}$ beschleunigt.
a$_1$) Geben Sie seine Geschwindigkeit $v(t)$ an.
b$_2$) Wie weit ist das Auto nach x Sekunden gefahren? Beschreiben Sie Ihr Ergebnis auch für allgemeines $v(t)$. **c**$_2$) Wie lange dauert es, bis das Auto 36 m zurückgelegt hat?

465. (Nur LK) $v(t)=0.01t^3-0.24t^2+1.35t$ ($t\in[0;20]$ sei die Zeit in Stunden, $v(t)$ in $\frac{m^3}{h}$) beschreibe den Zufluss von Wasser in ein Becken. Zu Beginn sei das Becken leer.
a$_2$) Wieviel m^3 sind nach 6 bzw. x Stunden im Becken?
b$_2$) Wann ist das meiste Wasser im Becken? Wann ist das wenigste im Becken?
c$_2$) (GTR oder Wertetabelle) Wann sind $8.4375m^3$ im Becken?

466. (≈ Abi 2011) In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus. Abb. 178/110 zeigt für $t\geq 0$ den Graph einer Funktion f mit $f(t)=150\cdot t^2\cdot e^{-0.2t}$, die die **momentane Erkrankungsrate** (= MER) der Stadt modellhaft darstellt. Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.
a$_1$) Berechnen Sie, wann die meisten Personen erkranken. Wieviele sind dies etwa?
b$_1$) Bestimmen Sie in welchem Zeitraum die MER über 500 Personen/Woche liegt.
c$_2$) Wann nimmt die MER am stärksten ab? Lesen Sie die minimale Abnahme der MER ab.

d_2) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Amt gemeldet. Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 2 000 Personen gemeldet. Bestimmen Sie wieviele Personen nach 15 Wochen insgesamt gemeldet sind. e_2) Zeigen Sie, dass für $t > 10$ die MER rückläufig ist.

f_2) Zeigen Sie, dass $F(t) = -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0.2t}$ eine Stammfunktion von f ist.

$\mathrm{g}_{3,L}$) Geben Sie eine Funktion $\tilde{F}$ für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.
h_2) Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40 000 bleiben wird.

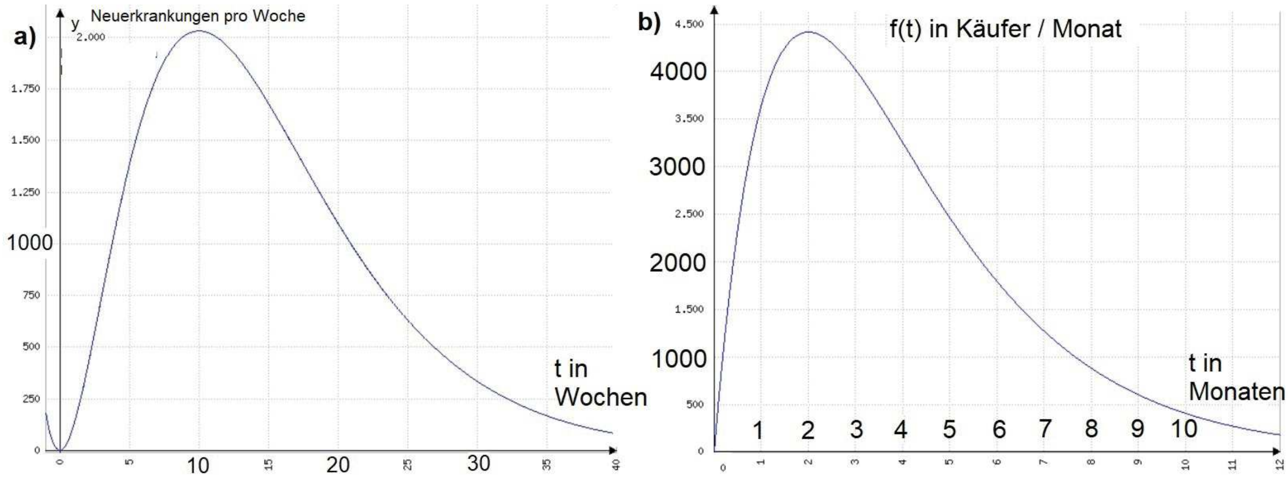

Abb. 110 Erkrankungsrate zu Ag 177/466 App Käufer pro Monat zu Ag 178/467 → ab S.912

467. (≈ Abi 2017) Abb. 178/110 b zeigt für $0 \le t \le 12$ den Graph einer Funktion f mit $f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0.5t}$ der die Anzahl der Käufer einer neu eingeführten Smartphone-App modelliert ($0 \le t \le 12$ in Monaten nach der Einführung, $f(t)$ in Käufer pro Monat).

a_1) Berechnen Sie die maximale momentane Änderungsrate. b_1) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate größer als 4000 Käufer pro Monat ist. c_1) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate am stärksten abnimmt bzw. zunimmt.
d_2) Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Käufer fünf Monate nach Einführung der App.
e_2) Zeigen Sie, dass für $t > 2$ die Funktion f smf ist nur positive Werte annimmt. Interpretieren Sie dies im Bezug auf die Entwicklung der Käuferzahlen.
f_2) Bei einer anderen neuen App erwartet man maximal 30 000 Käufer. In einem Modell soll angenommen werden, dass sich die Gesamtzahl der Käufer nach der Funktion $g(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ ($k > 0$) entwickelt. 6 Monate nach Verkaufsbeginn gibt es bereits 20 000 Käufer. Bestimmen Sie einen Funktionsterm, welcher die Gesamtzahl der Käufer in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

468. (≈ Abi 2007) Die momentane Ankunftsrate an einem Kino, also die Anzahl der ankommenden Personen pro Min, soll modellhaft beschrieben werden durch die Fktn f mit $f(t) = 0.27t^2 \cdot e^{-0.12t}$. Dabei ist t die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(t)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute. Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.
a_1) Zeigen Sie, dass $F(t) = -(2.25 \cdot t^2 + 37.5 \cdot t + 312.5) \cdot e^{-0.12t}$ eine Stammfunktion von f ist.
$\mathrm{b}_{2,L}$) Geben Sie eine Fkt $F_0(t)$ für die Anzahl der wartenden Personen um t min nach 19.00 Uhr an.
c_2) Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino?

469. (Nur LK ≈ Abi 2005) Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch die Funktion $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ beschrieben ($t \ge$ in Jahren seit Untersuchungsbeginn, $f(t)$ in Millionen Fische pro Jahr). **a_2)** Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$. Weisen Sie nach, dass f für $t > 0$ monoton abnimmt. Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt? Begründen Sie!
b_1) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(t) = \frac{-1}{1+e^t}$ eine Stammfunktion von f ist.
c_2) Geben Sie eine Funktion $F_0(t)$ für den Fischbestand zum Zeitpunkt t an.
d_2) Welcher Fischbestand ist langfristig zu erwarten?