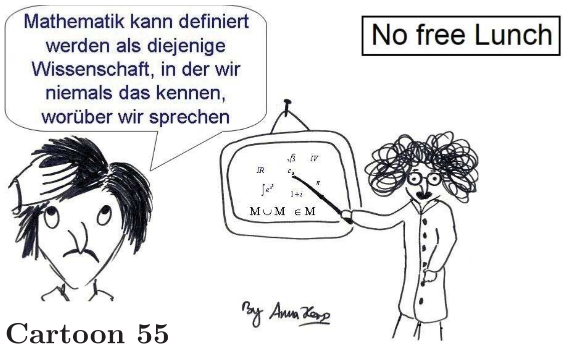
b_1) Welche spezielle Lage haben die drei Ebenen $E_1 : x_1 + x_2 - x_3 = 1$, $E_2 : 3x_2 - 2x_3 = 1$ und $E_3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ zueinander? Geben Sie auch für diese Lage ein praktisches Beispiel an.



Cartoon 55

719. **Minimalanforderung** UE 12_1 Ebenen: Gegeben seien die Punkte $A(2|1|1)$, $B(1|2|1)$, $C(3|3|0)$, $D(4|2|0)$, $G(2|5|3)$, $I(4|7|5)$, $J(3|8|5)$, $K(5|9|4)$, $L(7|2|-1)$.
a) Berechnen Sie die Koordinatenform der Ebene E durch A, B und C. **b)** Zeichnen Sie E.
c) Wie lauten die Koordinatenformen aller Koordinatenebenen?
d) Geben Sie eine Ebene durch G an, die parallel zur x_1, x_2 Ebene ist.
e) Welche spezielle Lage hat die Ebene $E_1 : x_1 + 8x_3 = 8$? Zeichnen Sie E_1.
f) Welche Lage hat E zu den Geraden $\overline{DL}$, $\overline{IJ}$ und $\overline{IL}$? Berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt.
g) Berechnen Sie die Schnittgerade von E mit $E_5 : x_1 + x_2 = 0$ und mit $E_6 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$.
h) Berechnen Sie die Lagen von E zu E_2 durch A, B und D, zu E_3 durch A, B und I und zu E_4 durch I, J und K.

720. **Aus dem Abitur:** ($\approx$ Abi 2011) a) Eine prismenförmige Truhe ist durch ihre Eckpunkte $A(6|4|0)$, $B(6|8|0)$, $C(-4|8|0)$, $D(-4|4|0)$, $P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$ und $S(-4|4|4)$ gegeben. Das Viereck $PQRS$ beschreibt den Deckel der Truhe.

i_1) Stellen Sie die Truhe in einem Koordinatensystem dar. Berechnen Sie das Volumen der Truhe. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.

$\text{ii}_{3,L}$) Gegeben ist eine Ebenenschar durch $E_a : x_2 + ax_3 = 6 - 3a$. Zeigen Sie, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand $BCRQ$ liegt, zur Ebenenschar gehören. Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.

b) Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck $A(4|0|0)$, $B(4|6|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(0|0|0)$ und als Dachfläche das Viereck $E(4|0|4)$, $F(4|6|1)$, $G(0|6|5)$ und $H(0|0|8)$ (Koordinatenangaben in Meter). i_1) Stellen Sie das Gebäude in einem Koordinatensystem dar. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche liegt. Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist. ii_4) Eine Person mit 1.7 m Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5|1|0)$ aus in positiver x_2-Richtung. Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?

c) ($\approx$ Abi 2016) In einem Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(15|0|0)$, $B(15|20|0)$ und $C(0|20|6)$ Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche $ABCD$ einer Tribüne (alle Koordinaten in m). Die x_1x_2 -Ebene stellt den Erdboden dar. Die Ecken der Dachfläche liegen in der Ebene $E : x_1 - 3x_3 = 27$ und vertikal über den Ecken der Nutzfläche. i_1) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt. Ermitteln Sie den Inhalt der Nutzfläche. i_2) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mind. $2.5m$ hoch sein. Überprüfen Sie, ob dies erfüllt ist.

d_3) ($\approx$ Abi 2014) An einer rechteckigen Platte mit den Ecken $A(10|6|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(10|0|3)$ ist im Punkt $F(5|6|0)$ ein $2m$ langer Stab befestigt, der in positive x_3-Richtung zeigt. Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(8|10|2)$. (Koordinatenangaben in m)
i_1) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt. Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.
ii_3) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte. Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes. Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

e_3) ($\approx$ Abi 2019) An der Stelle $F(7.8|3|0)$ steht ein Mast senkrecht zur x_1x_2 Ebene. Die Sonne fällt in Richtung $\vec{v} = (-9|1|-4)^\tau$ ($^\tau$ heißt Spaltenvektor) ein. Der Schattenpunkt der Spitze liegt auf der Strecke $O(0|0|0)$, $A(4|6|10)$. Wie hoch ist der Mast (alle Maße in m)?

721. (Nur LK) Ber. Sie eine Koordinatenfom der Ebene durch $A(1|1|1)$, B_a und C_a. Beschr. Sie die Lage der Schar. a_3) $B_a(3|2|3)$; $C_a(0|0|a)$; b_3) $B_a(1|a|2)$; $C_a(a|1|a)$; $\boxed{c_3}$) $B_a(4|2|3)$; $C_a(a|1|a)$;

d_3) Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen der folgenden Scharen ($a \in \mathbb{R}$) in einer Geraden schneiden: **i)** $3x_1 - ax_2 + 3ax_3 = 6a + 3$, **ii)** $3x_1 - 3ax_2 + (2a-1)x_3 = 2 - a$,
$\boxed{\textbf{iii)}}$ $(a+2)x_1 - ax_2 - (a+1)x_3 = a + 2$;

10.4 Das Spatprodukt (UE 12_2)

Basis: Ag 661 h, Ag 686, Ag 703, F 83.

Das Spatprodukt dient zur Berechnung von Pyramidenvolumina.

10.4.1 Das Kreuzprodukt (e: *cross product*) $\rightarrow$ 10.10.7 (GFS) LS: S.303+304 Ag 1,2

722. (U) a_1) Was gilt für einen Vektor $\vec{n}$, der zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist (vgl. Ag 703, F 83)?

b_w) Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; finden Sie alle Vektoren $\vec{n}$, die zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.

c$_1$) Ber. Sie einfach eine Lösung ($\neq (0|0)$) der Gln: $3x - 4y = 0$, $6x + 11y = 0$, $ax + by = 0$.
d$_4$) i) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallel (linear unabhänig). Berechnen Sie (allgemein) einen Vektor $\vec{n}$, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist **(Formel 88)** . ii) Beim Lösen des LGS entsteht ein bestimmter Vorfaktor. Wo haben Sie diesen schon einmal gesehen? iii) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ aus Teil b)

e_2) (KA$_G$) Ber. Sie 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boxed{\text{ii)}}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) der Richtungsvektoren von Aufgabe 704 (+ Ag 706).

f_2) Zeigen Sie $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ **(Formel 89)** .

723. (U) a_e) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und verallgemeinern Sie.

b_5) Zeigen Sie $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel (linear abhängig) **(Formel 89)** .
c_1) Lösen Sie die Klammer von $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ auf. Welches Gesetz verbirgt sich dahinter?
d_1) Lösen Sie die Klammer von $r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ auf. Warum ist dies kein echtes Assoziativgesetz?
e_1) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, vergleichen Sie Ihr Erg. mit Ag 722 d) und verallgemeinern Sie.
f_2) Warum gilt das Kommutativgesetz beim Vektorprodukt nicht? Was gilt stattdessen?

10.4.2 lineare Abh. im Dreidimensionalen (nur LK) $\rightarrow$ 10.9.4 LS: S.321-324

724. a_r) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ heißen parallel (linear abhängig = l.a.), wenn diese die gleiche Richtung haben, oder wenn $\vec{b} =$________ ist. Sie liegen also 'auf einer ______________'.

b_e) Wir betrachten jetzt die Vektoren $\vec{a} = \binom{2}{1}$ und $\vec{b} = \binom{4}{-2}$. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ l.a.? Was ist $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ für eine Gleichung und was können Sie über deren Lösungsmenge aussagen?

Bei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ hat das hLGS $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ ______________ ___________
______________ $r =$____________.

c_e) Sind $\vec{a}$ und $\vec{c} = \binom{4}{2}$ l.a.? Gilt die Aussage von b) auch für die Gleichnung $r\vec{a} + s\vec{c} = \vec{0}$?

Bei ________________________ Vektoren $\vec{a}, \vec{c}$ hat das hLGS $r\vec{a} + s\vec{c} = \vec{0}$ ________________________.

d_e) Definieren Sie mit den Erkenntnissen aus b,c) den Begriff der linearen Unabhängigkeit (l.U.).

e_1) Untersuchen Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf l.U.